FYSIKTÄVLINGEN

FINALTÄVLING
9 maj 1998

LÖSNINGSFÖRSLAG

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDET

1. Frekvensändringen blir $2f\dfrac{v}{c}$, (pga brytningen blir vinkeln mot ådern ≈ 0) vilket ger 9 cm/s utan möjlighet att avgöra flödets riktning. Detta värde stämmer hyfsat, ty i aorta är det 4 dm/s och i kapillärerna 0,5 mm/s. Man kan skilja på artärer och vener.

2. Pyramidens volym är $\dfrac{230\ \ 230\ \ 145}{3} = 2{,}6\ \ 10^{6}\ \ \mathrm{m}^{3}$

Sten har en densitet av omkring 3000 kg/m^3 vilket ger en massa $7\cdot 10^9$ kg. Arbetet att lyfta denna massa till pyramiden medelhöjd 145/4 m blir ungefär $3\cdot 10^{12}$ J. En människa i inte alltför hårt arbete förmår uträtta omkring 100 J/s. Att uppföra pyramiden tar alltså om vi antar att slavarna arbetar 300 dagar per år och 8 timmar per dag

$$\frac{3\ \ 10^{12}}{100\ \ 3600\ \ 300\ \ 8} = 3500\ \text{slavår}$$

Även en så liten arbetsstyrka som 1000 slavar skulle alltså kunna uppför pyramiden på avsevärt mindre än 10 år. Herodotos' siffra är alltså kraftigt överskattad även om vi räknar in arbetet att hugga och transportera fram stenen.

3. Låt fotens höjd på ett glas vara längdenhet och anta att glasets masscentrum ligger på fotens högsta punkt. För det tomma glastornet ligger då masscentrum på höjden 8. Kalla massan av ett glas för m. Låt masscentrum för champagnen i ett fullt glas ligga på höjden d över fotens högsta punkt. Masscentrum för champagnen i ett fullt glas ligger på höjden 15+δ, för två på höjden 14,5+δ, för tre på höjden 14+δ o s v. Kalla massan av champagnen i ett fullt glas för M. Det totala masscentrum för glastorn med N fyllda glas ligger då på höjden

$$h = \frac{15m\ \ 8 + NM\left(15{,}5 + \delta - 0{,}5N\right)}{15m + NM} = \frac{120q + N\left(15{,}5 + \delta - 0{,}5N\right)}{15q + N}$$

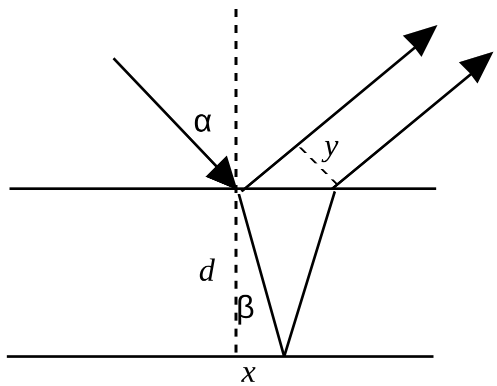
med $q = m\,/\,M$. Problemtexten ger att massan champage i ett glas är $3\cdot 750\ /\ 15 = 150$ g. Denna höjd har i allmänhet ett maximum när tornet är ungefär halvfullt. Maximum ges av

$$\frac{dh}{dN} = \frac{\left(15{,}5 + \delta - N\right)\left(15q + N\right) - \left(120q + N\left(15{,}5 + \delta - 0{,}5N\right)\right)}{\left(15q + N\right)} = 0$$

Problemtexten tyder på att detta inträffade då $N = 6$. Sättes detta in får man $q = \dfrac{18}{22{,}5 + 15\delta}$

och med δ i intervallet [0, 0,5] får man $m \approx 100$ g.

4. En ljusstråle som infaller mot glasrutan reflekteras i glasets fram och baksida. Ögat ser då två parallellförskjutna strålar d v s ett föremål som reflekteras kommer att se dubbelt ut med en viss liten parallellförskjutning.



Med figurens beteckningar har vi : $y = 2x\cos\alpha \quad x = d\tan\beta \quad \sin\alpha = n\sin\beta$

Detta ger $\quad y = 2d\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$

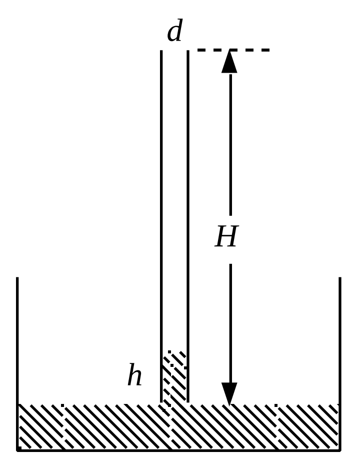
som är noll för $\alpha = 0^\circ$ och 90° och har ett maximum däremellan. Maximet bestämmes enklast numeriskt genom prövning eller grafiskt till $\alpha \approx 49^\circ$ om $n = 1{,}5$. Den maximala förskjutningen är $0{,}76d$. Månen eller avlägsna föremål avbildas också parallellsförskjutna, men på grund av det stora avståndet kan ögat inte upplösa de två bilderna.

5. Anta att vätskan stiger höjden h mellan kondensatorplattorna som totalt har höjden H. Kalla plattornas bredd för D och gapet mellan dem för d. Vi kan betrakta arrangemanget som två parallellkopplade kondensatorer med en total kapacitans av

$$C = \varepsilon_0\frac{(H-h)D}{d} + \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{hD}{d} = C_0 + (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 h\frac{D}{d}$$

där C_0 är kapacitansen för kondensatorn utan någon vätska.
Energin som är lagrad i en kondensator under spänning U ges av

$$W = \frac{CU^2}{2}$$



Kraften ges av arbete/längd d v s $F = \frac{dW}{dh} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \frac{DU^2}{d}$

Denna kraft är lika med kraften att lyfta en viss mängd vätska mellan plattorna $mg = hDd\rho g$

Detta ger slutligen $h = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \frac{U^2}{d^2 \rho g}$.

6. Man ser lätt att data tyder på att man har att frekvensen f är omvänt proportionell mot fallhöjden h. En vettig modell verkar vara att det blir någon slags stående ljudvågor i det fallande vattnet. Vi kan då ansätta

$$h = \frac{n}{4}\lambda$$

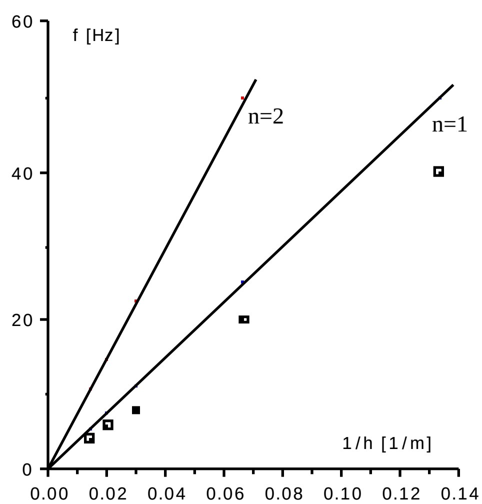
där n är ett heltal. Detta täcker möjligheterna att vi har en nod-buk eller nod-nod eller buk-buk i ändarna på fallet. Vidare har vi sambandet

$$\lambda f = v$$

där v är ljudets fart i det fallande vattnet. Detta ger oss

$$f = \frac{vn}{4}\frac{1}{h}$$

Vi plottar lämpligen data som frekvensen mot inverterad fallhjöjd.



I diagrammet är två linjer med riktningskoefficienter bestämda av v = 1500 m/s and n = 1 repektive 2. Som synes passar n = 1 bäst in men den ”effektiva” ljudfarten i fallet är tydligen något lägre än normalt, kanske beroende på att vattnet är uppblandat med luftblåsor. Man kan också och mer sannolikt tänka sig att ljudvågen reflekteras i bottnen under fallet vilket skulle ge en längre effektiv resonanspelare. Detta skulle innebära att man har en nod i fallets ena ända och en buk i den andra.

7. a) En kubikmeter granit har en massa på omkring 3 ton och innehåller då 3 μg radium vilket är $1{,}32 \cdot 10^{-8}$ mol eller $8 \cdot 10^{15}$ kärnor. Ur sambandet

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} N$$

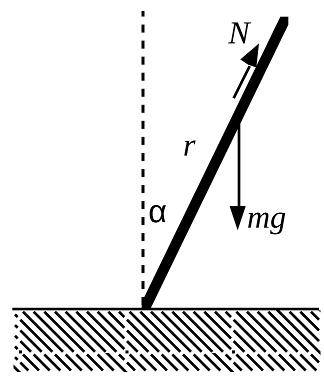
kan vi då räkna ut att 10^5 kärnor sönderfaller per sekund. Detta ger en effektutveckling av ungefär 0,5 μW/m^3.

Den faktiskt utvecklade energin uppges vara 3 gånger större d v s 1,5 μW/m^3.

b) Det uppmätta energiflödet per tid och area ut genom jordskorpan ges av 75 mW/m^2. Detta innebär att jordskorpans tjocklek är

$$\frac{75\ 10^{-3}}{1,5\ 10^{-6}} = 50 \text{ km}$$

8. Vi betraktar först skorstenen som helhet. Energilagen ger ett samband mellan lutningsvinkel α och vinkelhastighet ω. Vi har, om vi lägger masscentrum mitt på skorstenen



$$\frac{MgL}{2}(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2$$

Vi betraktar sedan en punkt på skorstenen på avståndet *r* från vridningsaxeln. I denna punkt påverkas en sten av två krafter utefter stången, tyngdkraftens komposant utefter stången och en normalkraft. Om normalkraften blir negativ brister skorstenen. Gränsfallet är att normalkraften precis är noll. Denna punkt rör sig i en cirkel d v s skall ha en centripetalacceleration

$$\omega^2 r$$

Newtons lag ger då sambandet

$$mg\cos\alpha - N = m\omega^2 r$$

Sätter vi normalkraften till noll och stoppar in värdet på vinkelhastigheten från det första sambandet får vi

$$r = \frac{L}{3}\frac{\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}$$

För små vinklar blir högra ledet mycket stort d v s brytpunkten hamnar utanför skorstenen. När lutningsvinkeln blir 90˚ blir $r = 0$.När lutningsvinkeln växer från 0˚ kommer, då $r = L$, brytpunkten att nå skorstenens topp och skorstenen börjar falla sönder. Sätter vi in detta villkor får vi

$$\cos\alpha = \tfrac{3}{4} \text{ eller } \alpha = 41˚$$